



La résolution d'équations:

« Et s'il y avait plus que la balance? »

Annie-Joëlle Legault-Savard

Michel Pesant

Valériane Passaro

Introduction

- Cours de maîtrise (Université de Montréal-Hiver 2016)
- Exploration d'un thème: quelles sont les erreurs des élèves lors de la résolution d'équations et comment intervenir?
 - Lectures/résultats de recherche
 - Création/nouveauté
- « Seriez-vous prêts à partager vos réflexions et créations avec d'autres enseignants au congrès du GRMS? »

Étude des erreurs et constat

Exemples d'erreur

$$18z + 7 = -29 \text{ devient } 18z + 7 - 7 = -29 + 7$$


$$3x + 20 = 35 \text{ devient } 3x + 20 - 20 = 35$$

Étude des erreurs et constats

Recommandations

Donner du sens aux manipulations en axant sur le raisonnement.

- Éviter les « phrases recettes »
- Retravailler le sens de l'égalité
- Encourager l'autocontrôle



Résoudre l'équation

$$5n + 6 = 2n + 12$$

Résolution d'équations

Conservation de l'égalité (balance)

Avantages

- Analogie qui permet d'exécuter des étapes mécaniquement
- Mécanique performante
- Efficace pour les grands nombres, les nombres négatifs, les fractions, etc.

Limites

- Souvent peu rattaché au quotidien des élèves
 - Ne donne pas de sens aux manipulations
 - N'explique pas pourquoi cette analogie fonctionne
- Ne donne pas de sens à ce qu'est une inconnue

$$5n + 6 = 2n + 12$$

$$5n - 2n + 6 = 2n - 2n + 12$$

$$3n + 6 = 12$$

$$3n + 6 - 6 = 12 - 6$$

$$3n = 6$$

$$3n \div 3 = 6 \div 3$$

$$n = 2$$



Autres techniques de résolution

Résolution d'équations

Opérations inverses

Avantages

- Rapide si bien utilisée
- Raisonnement naturel chez les élèves avec le principe de valeur manquante ou en contexte

Limites

- Difficile si l'élève ne connaît pas les priorités des opérations dans l'expression
- Faire les propriétés inverses
- Complexe avec des inconnues des deux côtés

$$3n + 4 = 13$$

$$3n = 13 - 4$$

$$3n = 9$$

$$n = 9 \div 3$$

$$n = 3$$

$$5n + 6 = 2n + 12$$

Résolution d'équations

Recouvrement

Avantage

- Retour à la notion de valeur manquante

Limite

- Seulement pour les inconnues d'un seul côté

$$\boxed{3n} + 4 = 13$$

$$3\boxed{n} = 9$$

$$\boxed{n} = 3$$

$$5n + 6 = 2n + 12$$

Résolution d'équations

Décomposition

Avantages

- Manipulations simples des nombres
- Facile à saisir pour les élèves
- Travail sur les nombres et le sens de l'égalité

Limite

- Nécessite plus de temps ou d'espace

$$\begin{aligned}5n + 6 &= 2n + 12 \\2n + 3n + 6 &= 2n + 12 \\3n + 6 &= 12 \\3n + 6 &= 6 + 6 \\3n &= 6 \\3 \times n &= 3 \times 2 \\n &= 2\end{aligned}$$

Résolution d'équations

Constats

- La verbalisation est vraiment importante.
- Différentes méthodes de résolution existent.
- Les méthodes proposent peu d'images concrètes.
- C'est intéressant, mais peut-être pas suffisant. Y a-t-il autre chose que l'on pourrait faire?

Modes de représentations

Évolution

- Représentation à l'aide de manipulations matérielles
- ↕
- Représentation visuelle (dessin)
- ↕
- Représentation symbolique

Modes de représentations

Manipulations matérielles

Exercice 1

Placez sur le côté gauche de votre bureau 4 enveloppes et 3 jetons.

Placez sur le côté droit de votre bureau 9 jetons et 2 enveloppes .

Chaque enveloppe contient le même nombre de jetons.

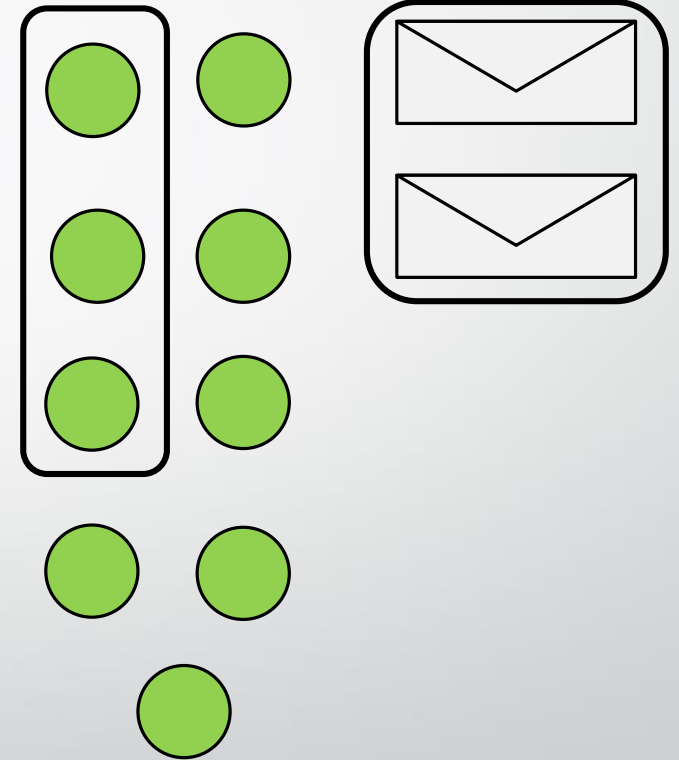
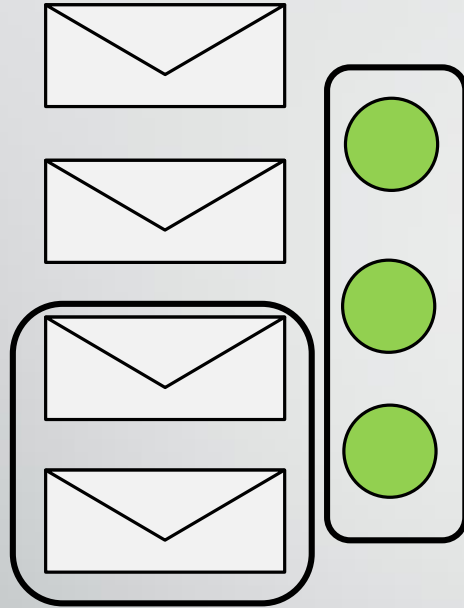
Il y a un même nombre de jetons de chaque côté de votre bureau.

Combien de jetons se trouvent dans une enveloppe?

Modes de représentations

Manipulations matérielles























Retour sur l'exercice



Modes de représentations

Manipulations matérielles

Progression proposée en classe

- 1  = 5 
- 8  = 1 
- 2  = 6 
- 12  = 3 
- 1  + 5  = 12 
- 13  = 3  + 4 
- 4  + 3  = 1  + 16 
- 4  + 3  = 2  + 9 

Modes de représentations

Manipulations matérielles

Avantages et limites

Avantages

- Très visuel: image marquante et signifiante pour l'élève
- Verbalisation facile des justifications
- Manipulations toujours appréciées des élèves
- Fonctionne avec des inconnues des deux côtés de l'égalité

Limites

- Une enveloppe et un jeton peuvent difficilement représenter un nombre élevé, négatif ou décimal
- Temps, gestion, espace et matériel en classe

Modes de représentations

Représentation visuelle

Exercice 2

Sur une feuille,

Dessinez sur le côté gauche 3 enveloppes et 10 jetons.

Dessinez sur le côté droit 4 jetons et 6 enveloppes.

Chaque enveloppe contient le même nombre de jetons.

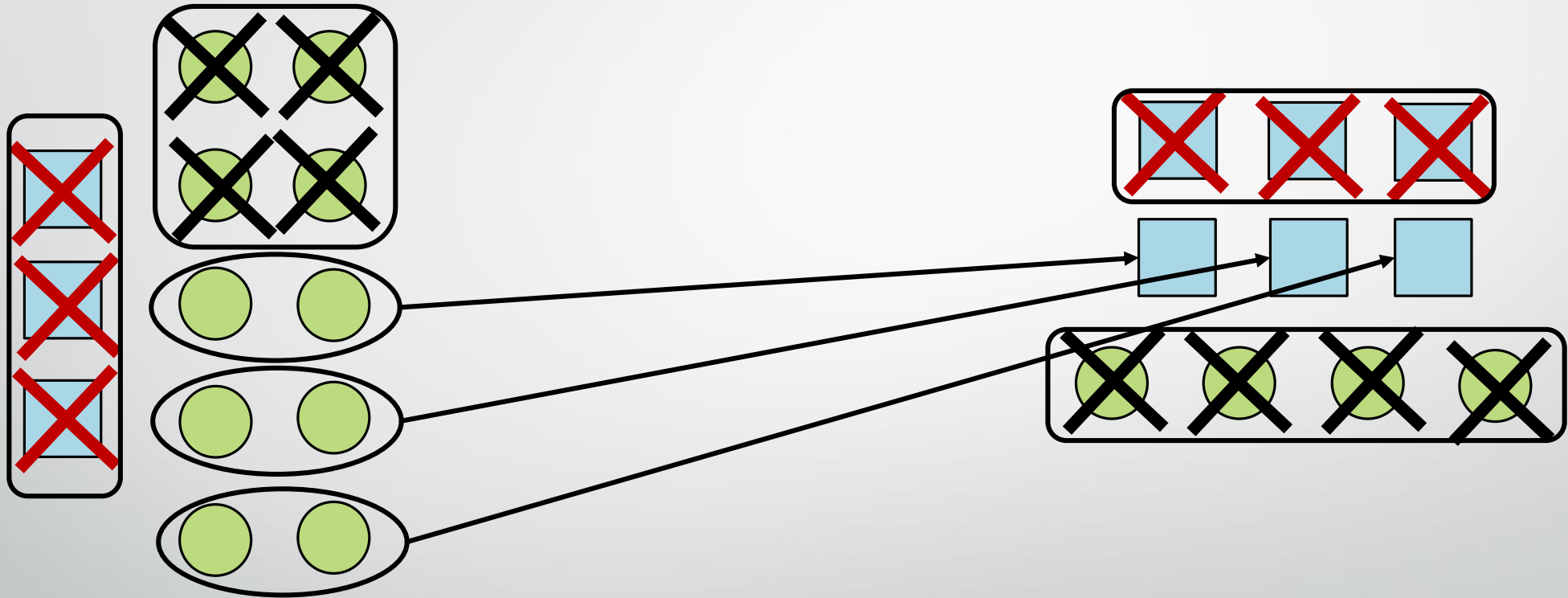
Il y a un même nombre de jetons de chaque côté de votre feuille.

Combien une enveloppe représente-t-elle de jetons?

Modes de représentations

Représentation visuelle

Retour sur l'exercice



Modes de représentations

Représentation visuelle Avantages et limites

Avantages

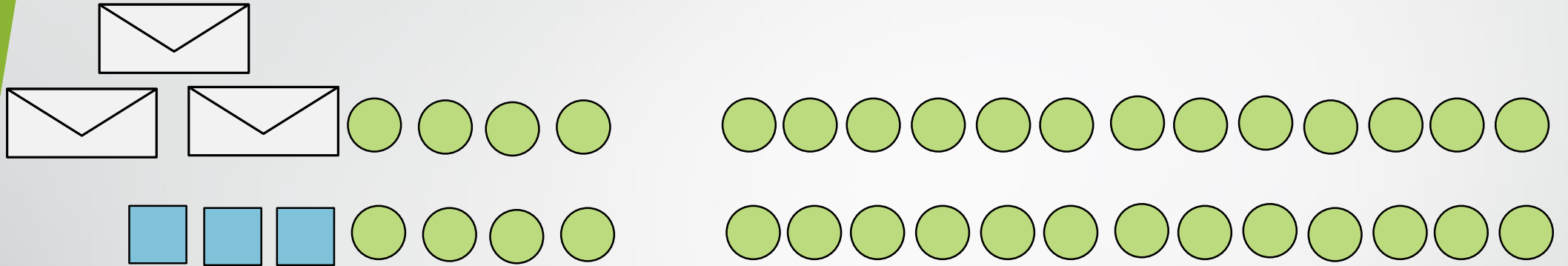
- Moins de matériel requis
- Temps et gestion simplifiés
- Verbalisation facile des justifications
- Fonctionne avec des inconnues des deux côtés de l'égalité

Limites

- Difficile de représenter un nombre élevé, négatif ou décimal
- Pas aussi concret que le matériel

Modes de représentations

Passage entre les représentations



$$3 \text{ (blue squares)} + 4 = 13$$

$$3 \times \text{(blue square)} + 4 = 13$$

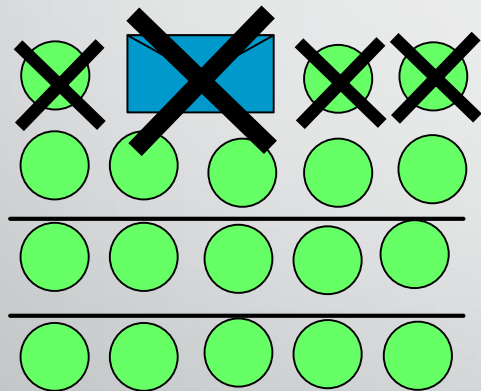
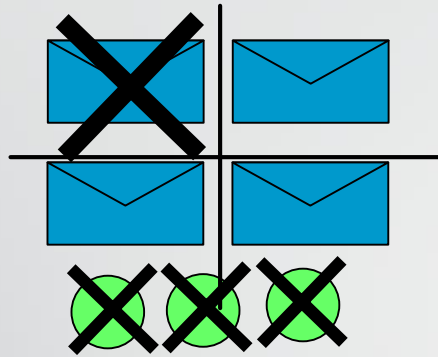
$$3 \times n + 4 = 13$$

$$3n + 4 = 13$$

Modes de représentations

Passage entre les représentations

Démonstration simultanée



$$4 \text{ enveloppes} + 3 = 1 \text{ enveloppe} + 18$$

$$4 \times n + 3 = 1 \times n + 18$$

$$3 \times n + 1 \times n + 3 = 1 \times n + 18$$

$$- 1 \times n \quad - 1 \times n$$

$$3 \times n + 3 = 18$$

$$3 \times n + 3 = 15 + 3$$

$$- 3 \quad - 3$$

$$3 \times n = 15$$

$$\div 3 \quad \div 3$$

$$n = 5$$

1 enveloppe = 5 jetons

Modes de représentations

Passage entre les représentations

Démonstration simultanée

$$2n + 13 = 6n + 5$$

2 enveloppes + 13 = 6 enveloppes + 5

$$2 \times n + 13 = 6 \times n + 5$$

$$- 2 \times n \quad - 2 \times n$$

$$13 = 4 \times n + 5$$

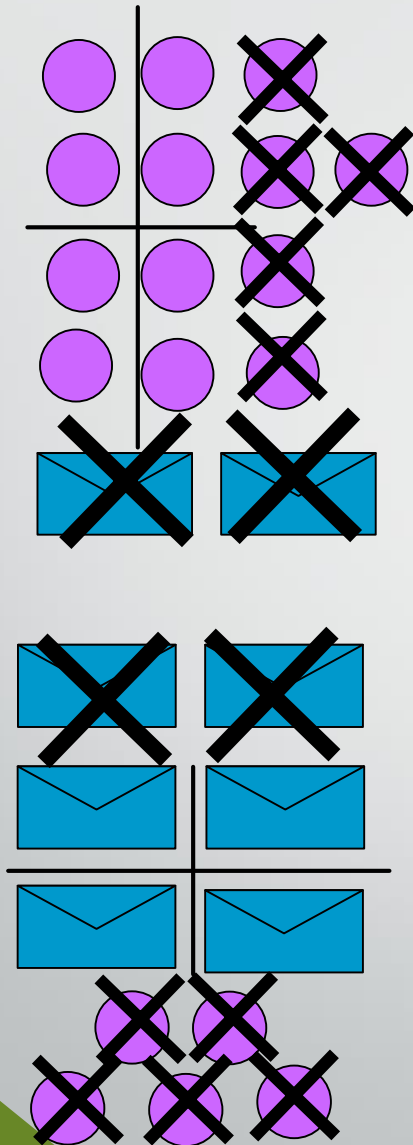
$$- 5 \quad - 5$$

$$8 = 4 \times n$$

$$\div 4 \quad \div 4$$

$$2 = n$$

1 enveloppe = 2 jetons



Retour sur la résolution de départ

$$5n + 6 = 2n + 12$$

- Équation avec matériel
- Équation avec dessin
- Équation avec symbolique
 - Décomposition
 - Conservation de l'égalité

Conclusions

- Combiner plusieurs approches/méthodes
- Retour sur les recommandations

Donner du sens aux manipulations en axant sur le raisonnement.

- Éviter les « phrases recettes »
- Retravailler le sens de l'égalité
- Encourager l'autocontrôle

Conclusions

- À retenir:
 - Faire manipuler les élèves
 - Créer des images mentales
 - Donner du sens au symbolisme algébrique
 - Donner du sens aux manipulations algébriques
 - Verbaliser le raisonnement
 - Coordonner plusieurs représentations (matériel, dessin et symboles)

Ce travail permet de développer le contrôle chez les élèves à long terme.

Références

- Artigue, M. (2012). *Enseignement et apprentissage de l'algèbre*. Université Paris Diderot, LDAR et IREM. Repéré à <http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/contributions/conference-nationale-artigue-1>
- Cortes, A. et Kavafian, N. (1998). *Les principes qui guident la pensée dans la résolution des équations*. CNRS, Université Paris. http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_x/fic/51/51x5.pdf
- Groupe TRAAM (2012). *Les stratégies et les erreurs des élèves concernant la résolution d'équations du premier degré*. Académie d'Orléans-Tours. Repéré à http://maths.ac-orleans-tours.fr/fileadmin/user_upload/maths/Rubrique_institutionnelle/Traam/strategies-erreurs-equations.pdf
- Labelle, Hélène. (2008). *Les pratiques pédagogiques favorisant le développement de la pensée algébrique*. (Mémoire de maîtrise, Université du Québec à Chicoutimi) Repéré à <http://constellation.uqac.ca/210/>
- Service Ontario (2013). *Mettre l'accent sur le raisonnement algébrique – Document d'appui sur l'importance de l'enseignement des mathématiques*. Repéré à <https://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/PayingAttentiontoAlgebraFr.pdf>
- Manuels scolaires